M. É. LEMOINE

Ancien élève de l'École Politecnique, à Paris.

SUITE DE TÉORÈMES ET DE RÉSULTATS

CONCERNANT LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

Extrait des Comptes rendus de

l'*Association Française pour l'avancement des Sciences.*

CONGRÈS DE PARIS — 1900

PARIS

SECRÉTARIAT DE L'ASSOCIATION

(Hôtel des Sociétés savantes)

28, RUE SERPENTE

M. Émile LEMOINE

Ancien Élève de l'École Politecnique, à Paris.

SUITE DE TÉORÈMES ET DE RÉSULTATS CONCERNANT LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE [K 2 d]

— *Séance du 4 août.* —

Le mémoire que nous présentons ici n'est pas le dévelopement d'un sujet unique, c'est une série de téorèmes dont beaucoup sont indépendants de ceus qui les entourent, ou encore ce sont de simples résultats de calculs exécutés, mais qui ont pour lien comun l'intérêt qu'ils peuvent présenter dans l'étude de la géométrie du triangle.

Soit ABC le triangle de référence. Nous employons les coordonées normales trilinéaires; quand nous passerons aus coordonées cartésiènes CB sera l'axe des x, CA celui des y; o, o_a, o_b, o_c, O, seront les rayons des cercles tritangents et du cercle circonscrit, r, r_a, r_b, r_c, R leurs rayons; d, δ_a, δ_b, δ_c seront $4R + r$, $4R - r_a$, $4R - r_b$, $4R - r_c$; d, d_a, d_b, d_c seront les longueurs oO, o_aO, o_bO, o_cO; ω l'angle de Brocard; ω et ω' les points direct $\left(\frac{b}{c}, \frac{c}{a}, \frac{a}{b}\right)$ et rétrograde de Brocard; K, G, H seront le point de Lemoine, le baricentre, l'ortocentre.

Φ le point $\dfrac{a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2}{a}$, etc.

A(ρ) ou A(MN) signifiera un cercle de centre A et de rayon ρ ou MN.

S sera la surface du triangle ABC.

A. — Divers téorèmes ausquels s'aplique la transformation continue

J'ai exposé la téorie de la *transformation continue* dans divers mémoires, entre autres dans celui que j'ai présenté au Congrès de Marseille à l'*AFAS* (1891) et, j'en ai depuis fréquemment fait des aplications ; mais la métode a une tèle fécondité, est d'un usage si facile, èle a une tèle importance dans la géométrie du triangle que je veus en doner ici de nouveaus exemples. Je me suis aperçu, depuis 1891, que les mêmes résultats pouraient s'obtenir avec la téorie des cicles et des semi-droites de Laguerre, seulement

la transformation continue est plus imédiate, plus mécanique pour ainsi dire et semble faite exprès pour élargir les vues dans la géométrie du triangle.

1. — Soit un triangle ABC, M_a le point sur BC tel que la some des distances de M_a à C et à la droite CA égale la some des distances de M_a à B et à BA, M_b, M_c les points analogues sur CA et sur AB. Les trois droites AM_a, BM_b, CM_c concourent au point M : $\frac{2R}{a}+1, \frac{2R}{b}+1, \frac{2R}{c}+1$. Si au lieu du point M_a on considère le point M'_a tel que la diférence de ses distances à C et à CA, égale la diférence de ses distances à B et à BA, etc. AM'_a, BM'_b, CM'_c concourent au point M' : $\frac{2R}{a}-1$ $\frac{2R}{b}-1, \frac{2R}{c}-1$.

La droite MM' se confond avec la droite oG :

On a $\overline{MM'}^2 = \frac{4p^2R^2(p^2+5r^2-16Rr)}{(9R^2-p^2)^2}$, mais remarquant que si ν est le point de Nagel $\frac{p-a}{a}$, etc. on a $o\nu^2 = p^2+5r^2-16Rr$, on trouve :

$$MM' = \frac{2Rp.o\nu}{9R^2-p^2} = \frac{6Rp.oG}{9R^2-p^2}$$

on a:
$$\frac{oM}{oM'} = \frac{3R-p}{3R+p}; \quad \frac{\nu M}{\nu M'} = \frac{(3R-p)(2R+p)}{(3R+p)(2R-p)}$$

o et G sont conjugués armoniques par raport à M et à M' :

$$M\nu = \frac{3(p+2R).\ oG}{3R+p.}, \quad M'\nu = \frac{3(p-2R).\ oG}{3R-p}.$$

Le milieu de MM' est le point $\frac{2p-3a}{a}$, etc.

En apliquant la transformation continue en A on trouve imédiatement les téorèmes corespondants pour les points :

$$M_A : \frac{2R}{a}-1, \frac{2R}{b}+1, \frac{2R}{c}+1$$

$$M'_A : \frac{2R}{a}+1, \frac{2R}{b}-1, \frac{2R}{c}-1$$

et les propriétés analogues à cèles des points M et M'.

Il y a aussi évidemment des points M_B, M'_B; M_C, M'_C.

2. — Les distances à la droite $\Sigma\, x(p - a) = o$ paralèle à l'axe antiortique, des points : 1° o ; 2° O ; 3° de Nagel ; 4° de Gergonne ; 5° de Lemoine ; 6° le baricentre ; 7° $p - a$, etc. ; 8° $\frac{1}{p-a}$, etc. ; 9° $b^2 - c^2$, etc. (point qui apartient à l'axe antiortique et à la droite $\Sigma\, ax^2 = o$) ; 10° $a\,(p - a)$, etc., sont respectivement : 1° : $+\frac{Rr}{d}$; 2° : $+\frac{R(R-r)}{d}$; 3° : $+\frac{p^2 - 12Rr + r^2}{2d}$;

$$4^\circ : +\frac{r(p^2 + r\delta)}{2d\delta};\ 5^\circ : +\frac{2Rr^2\delta}{d(p^2 - r\delta)};\ 6^\circ : +\frac{p^2 - 8Rr + r^2}{6d};$$

$$7^\circ : +\frac{Rp}{rd\delta}(p^2 - 2r\delta)\ ;\ 8^\circ ; +\frac{3r^2R}{d(2R-r)};\ 9^\circ : -\frac{2Rr}{d};\ 10^\circ : +\frac{Rr\,(2R-r)}{d(R+r)}.$$

Le point $a(p - a)$, etc., est le pôle de l'axe antiortique par raport au cercle circonscrit.

La transformation continue multiplie ces résultats.

3. — Soient dans un triangle ABC A′, B′, C′ les pieds des bissectrices intérieures ; je prends sur B′C′ le point A_1 situé sur la paralèle à BC, menée par le milieu de la hauteur partant de A. La droite AA_1 est paralèle à la droite qui joint les pieds des bissectrices extérieures (axe antiortique).

Il y a 2 points B_1, C_1 analogues à A_1.

B_1C_1 a pour équation $\Sigma\, \frac{x}{b-c} = 0$

La transformation continue done le téorème relatif aux bissectrices extérieures.

4. — La conique inscrite qui a même centre $\frac{(b^2-c^2)^2}{a}$, etc. que l'iperbole de Kiepert, a pour équation $\sum \sqrt{\frac{ax}{b^2 - c^2}} = 0.$

Le point de Gergonne de cète conique (qui est toujours une iperbole) est à l'infini dans la direction $\frac{b^2-c^2}{a}, \frac{c^2-a^2}{b}, \frac{a^2-b^2}{c}$ de l'axe ortique.

Les polaires du point de Lemoine par raport aus coniques inscrite et circonscrite de Steiner, sont l'axe ortique et sa paralèle

$$\sum ax\,(b^2 + c^2) = 0.$$

Les polaires de o par raport à ces deus coniques sont les droites

$\sum a(p-a)x = 0$ et $\sum a(b+c)x = 0$ qui ont $\frac{b-c}{a}$, etc., pour point à l'infini. La transformation continue done les polaires de o_a, o_b, o_c.

Les polaires de H sont $\sum a^2x(\cos A - \cos B \cos C) = 0$ et

$$\sum a^2x \cos A = 0 \text{ ; point à l'infini : } \frac{b^2-c^2}{a} \cos A, \text{ etc.}$$

Les polaires de O sont $\sum \frac{a^2x}{\cos A} = 0$ et $\sum a^2x \cos (B - C) = 0$; point à l'infini : $\frac{b^2 - c^2}{a} \cos A$, etc.

La polaire du point de Lemoine par raport à l'iperbole de Kiepert est la droite d'Euler.

5. — Si par le point M du plan d'un triangle ou même des paralèles aus trois côtés, chacune d'èles forme un triangle avec les deus autres côtés ; cela posé, si M est le point de Nagel $\frac{p-a}{a}$, etc. les périmètres de ces triangles sont proportionels à a, b, c.

Si M est le point $\frac{ab+ac-bc}{a}$, etc., ils sont proportionels à $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$,

Téorèmes analogues déduits par transformation continue.

Si M est le point $\frac{\cos A}{a^2}$, etc., ils sont proportionels à a^2, b^2, c^2.

Si M est le point de Lemoine, ils sont proportionels à $b^2 + c^2$, $c^2 + a^2$, $a^2 + b^2$.

Si M est le baricentre, la some des carés de ces périmètres est minima.

Pour ces trois derniers téorèmes, la transformation continue les reproduit sans modifications.

Par le point de Gergonne $\frac{1}{a(p-a)}$ etc. d'un triangle ABC, je mène des paralèles à 2 côtés ; la some des segments de ces paralèles compris entre le point de Gergonne et ces deus côtés est constante et égale à $\frac{2p(2R+r)}{\delta}$.

La transformation continue done d'autres téorèmes analogues.

6. — Le cercle d'Apollonius corespondant à BC : $y^2 - z^2 - 2zx \cos B + 2xy \cos C = 0$, coupe l'axe antiortique au point P_a : $-2R + r + r_a$, $-R - r + r_b$, $-R - r + r_c$.

a) AP_a, BP_b, CP_c concourent au point P : $-R - r + r_a$, $-R - r + r_b$, $-R - r + r_c$ sur la droite $\sum (b+c) = 0$ paralèle à l'axe antiortique.

b) La some des distances de P aus trois côtés est égale à r.

c) Les points O, *o*, P sont en ligne droite.

d) La distance de P à l'axe antiortique est : $\frac{Rr}{d}$.

e) On a : $OP = \frac{R^2}{d}$, $oP = \frac{2Rr}{d}$ et en *grandeur et en signe* : $\frac{oP}{OP} = \frac{2r}{R}$.

Ces téorèmes se multiplient *imédiatement* par transformation continue. Ainsi en transformant en A on a :

Le cercle d'Apollonius corespondant au côté BC coupe la droite

$-x + y + z = 0$ au point P_{aa} : $-2R - r - r_a$, $R - r_a - r_c$, $R - r_a - r_b$.

La même droite coupe le cercle d'Apollonius corespondant au côté CA au point P_{ba} : $-R + r_a - r$, $2R + r_a - r_c$, $R - r_a - r_b$; le cercle d'Apollonius corespondant au côté AB au point P_{ca} : $R + r_a - r$, $R - r_a - r_c$, $2R + r_a - r_b$.

a') Les trois droites AP_{aa}, BP_{ba}, CP_{ca} concourent au point P_α :

$$-R + r_a - r,\ R - r_a - r_c,\ R - r_a - r_b.$$

Situé sur la droite $x(b + c) + y(a - c) + z(a - b) = 0$, paralèle à $-x + y + z = 0$.

b') La some des distances de P_α aus trois côtés est égale à r_a.

c') Les points O, o_a; P_α sont en ligne droite.

d') La distance de P_α à la droite $-x + y + z = 0$ est $-\frac{Rr_a}{d_a}$.

e') On a $OP_\alpha = \frac{R^2}{d_a}$, $o_a P_\alpha = -\frac{2Rr_a}{d_a}$ et $\frac{o_a P_\alpha}{OP_\alpha} = -\frac{2r_a}{R}$.

En transformant ces *nouveaus* résultats en B et en C on aurait d'autres propositions (en A on reproduirait les premiers).

En transformant les *premiers* résultats en B et en C on aurait des résultats analogues à *a'*), *b'*), *c'*), etc., donant des points P_β, P_γ.

Les trois droites AP_α, BP_β, CP_γ se coupent au point π : $R - r_b - r_c$, $R - r_c - r_a$, $R - r_a - r_b$.

Propriété qu'on peut encore transformer, etc., etc.

Sans le fil de la transformation continue, il eut été impossible de *prevoir* ces résultats qui, avec èle ils s'obtiènent sur-le-champ et pour ainsi dire mécaniquement.

7. — On trouve (Mathesis 1886, p. 108), le téorème suivant dû à M. Casey.

Soient un triangle ABC; A′, B′, C′ *les pieds des hauteurs*, H_a *le milieu de* AA′; ω_a *le centre du cercle inscrit à* AB′C′; $\omega_a H_a$ *passe par le point de contact du cercle d'Euler et du cercle inscrit à* ABC.

Il est évidemment probable à priori qu'il y a des téorèmes analogues où figurent, au lieu du centre inscrit dans AB′C′ et du point de contact du cercle inscrit dans ABC et du cercle d'Euler les centres des cercles ex-inscrits dans AB′C′ et les points de contact du cercle d'Euler et des cercles ex-inscrits dans ABC, mais il n'est pas comode de les deviner *d'une façon précise* d'autant plus que ABC et AB′C′ sont *simétriquement* semblables ; il faudrait en tous cas les démontrer séparément. La transformation continue les énonce come mécaniquement et en est la démonstration. Soient ω_a, ω_{aa}, ω_{ab}, ω_{ac} les centres des cercles tritangents à AB′C′ homologues respectivement aus cercles o, o_a, o_b, o_c de ABC; d, d_a, d_b, d_c les points de contact de o, o_a, o_b, o_c avec le cercle d'Euler.

Le téorème de M. Casey revient à dire que H_a, d, ω_a sont colinéaires.

En faisant la transformation continue en A de ce résultat, on trouve que H_a, d_a, ω_{aa} sont colinéaires.

En faisant la transformation continue en B du téorème de M. Casey on trouve que H_a, d_a, ω_{ab} sont colinéaires.

La transformation continue montre cela aussi vite, d'ailleurs, analitiquement que géométriquement, en éfet, les coordonées de H_a, ω_a, d sont respectivement 1, cos C, cos B ; 1 + cos B + cos C, cos A, cos A; $\frac{p-a}{a}(b-c)^2$, $\frac{p-b}{b}(c-a)^2$, $\frac{p-c}{c}(a-b)^2$. Faisant la transformation continue en A on trouve : 1, cos C, cos B; $-1+\cos B+\cos C$, cos A, cos A; $-\frac{p}{a}(b-c)^2$, $\frac{p-c}{b}(a-c,)^2$ $\frac{p-b}{c}(a-b)^2$ qui sont les coordonées de H_a, ω_{aa}, d_a. Faisant la transformation continue en B au lieu de la transformation en A, on trouve 1, cos C, cos B;

$$-1-\cos B+\cos C,\ -\cos A, \cos A;$$

$$\frac{p-c}{a}(b+c)^2,\qquad \frac{p}{b}(c-a)^2,\qquad \frac{p-a}{c}(a+b)^2$$

c'est-à-dire: H_a, ω_{ac}, d_b, etc.

Le téorème *complet* de M. Casey est donc celui-ci :

Les points H_a, ω_a, d; H_a, ω_{aa}, d_a; H_a, ω_{ab}, d_b; H_a, ω_{ac}, d_c sont colinéaires.

8. — Soit un triangle ABC; je prends sur AC le point M_{ab} et sur AB le point M_{ac} tels que les distances de M_{ab} à BC et à CA soient respectivement égales aus distances de M_{ac} à AC et à BC.

J'ai sur BA et BC des points N_{bc}, N_{ba} et sur CA et CB des points P_{ca}, P_{cb} analogues : soient I_1 et I_2 les points de Jérabek $b, c, a; c, a, b$.

1° Les trois points M_{ac}, N_{ba}, P_{cb} sont sur la droite oI_1 et M_{ab}, N_{bc}, P_{ca} sur la droite oI_2.

2° Les trois droites $M_{ab}M_{ac}$, $N_{bc}N_{ba}$, $P_{ca}P_{cb}$, dont les équations sont : $x(a-b)(c-a)+y(a-b)^2+z(c-a)^2=0$, etc., sont respectivement paralèles à la direction Oo.

Les coordonées des points M_{ab}, M_{ac}, etc., sont $a-c,\ o,\ a-b;\ a-b,\ a-c,\ o$; etc.

3° On a : $M_{ab}M_{ac}=\dfrac{4Sd}{a^2-bc}$.

4° Les points M, N, P, où $M_{ab}M_{ac}$, $N_{bc}N_{ba}$, $P_{ca}P_{cb}$ coupent respectivement les côtés BC, CA, AB, se trouvent sur la droite $\Sigma\dfrac{x}{(b-c)^2}=0$.

La transformation continue apliquée à ces téorèmes et à ces équations done *imédiatement* des résultats qu'il serait bien dificile de deviner sans èle et qu'il faudrait, en tous cas, démontrer à part.

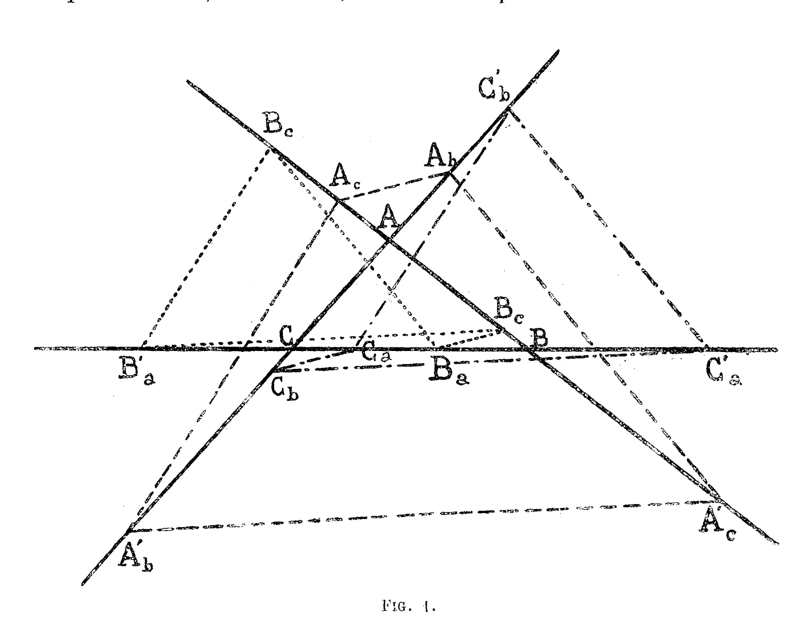


FIG. 1.

9. — M. Laisant a doné au congrès de Limoges (1890) le téorème suivant : ABC *étant un triangle, si nous portons sur les 2 côtés* BA, CA *à partir de* B *et de* C *et vers le somet* A, *des longueurs* BA_c, CA_b, *toutes deus égales au*

côté BC, *nous obtiendrons une droite* A_cA_b, *dont la direction sera indépendante du côté* BC *que nous aurons choisi pour éfectuer cète construction.*

Nous alons étudier ce téorème par la transformation continue et déveloper un peu cet exemple pour mètre en évidence la fécondité de la métode qui done, sans recherche, une moisson de résultats ausquels on n'aurait pas songé sans èle.

La direction A_cA_b est cèle de la perpendiculaire à Oo ou cèle de l'axe antiortique $x + y + z = 0$. Transformons en A (*fig. 1*) A_c devient A'_c, simétrique de A_c par raport à B, A_b devient A'_b, simétrique de A_b, par raport à C; O ne varie pas, o devient o_a, donc la direction de $A'_bA'_c$ est cèle de la perpendiculaire à Oo_a ou cèle de l'antibissectrice de A : $-x + y + z = 0$.

En transformant en B, on verrait que A_c devient A'_c, A_b reste A_b, donc $A_bA'_c$ a pour direction la perpendiculaire à Oo_b ou cèle de l'antibissectrice de B : $x - y + z = 0$.

De même, en transformant en C, on verra que $A_cA'_b$ a pour direction la perpendiculaire à Oo_c ou cèle de l'antibissectrice de C $x + y - z = 0$.

On a donc un quadrilatère $A_b\ A_c\ A'_b\ A'_c$ dont les côtés sont paralèles aus quatre droites $x \pm y \pm z = 0$.

En faisant les constructions analogues en partant des somets C et A au lieu de B et C, on obtiendrait un quadrilatère $B_cB_aB'_cB'_a$ qui aurait ses côtés paralèles à ceus du précédent. B_cB_a paralèle à A_bA_c; $B_cB'_a$ à $A'_bA'_c$; $B'_cB'_a$ à A'_bA_c; B'_cB_a à $A_bA'_c$; enfin, en opérant sur les somets A et B, un quadrilatère $C_aC_bC'_aC'_b$, tel que C_aC_b sera paralèle à A_bA_c; $C'_aC'_b$ à $A_bA'_c$; $C_aC'_b$ à A'_bA_c; C'_aC_b à $A'_bA'_c$.

En étudiant ces quadrilatères on trouve :

$$A_bA_c = \frac{ad}{R};\ A'_bA'_c = \frac{ad_a}{R};\ A'_bA_c = \frac{ad_b}{R};\ A_bA'_c = \frac{ad_c}{R}.$$

On aura de même :

$$B_cB_a = \frac{bd}{R};\ B'_cB'_a = \frac{bd_b}{R};\ B'_aB_c = \frac{bd_a}{R};\ B_aB'_c = \frac{bd_c}{R}.$$

$$C_aC_b = \frac{cd}{R};\ C'_aC'_b = \frac{cd_c}{R};\ C_aC_b = \frac{cd_a}{R};\ C_aC'_b = \frac{cd_b}{R}.$$

Ces quadrilatères sont intéressants, car, *sans être semblables*, ils ont leurs côtés paralèles et les côtés paralèles proportionels.

Les valeurs que nous venons de doner permètent de calculer très simplement les distances entre deus quelconques des 6 pieds des bissectrices sur les côtés oposés; par exemple, si je veus calculer la distance entre le

pied A_1 de la bissectrice extérieure de A sur BC et le pied C′ de la bissectrice intérieure de C sur AB, les 2 triangles semblables $C'BA_1$, $B_cBB'_a$ me doneront $\frac{A_1C'}{B'_aB_c} = \frac{A_1B}{B'_aB}$, d'où $A_1C' = \frac{abc\,d_a}{(a+c)(b-c)} = \frac{4Sd_a}{(a+c)(b-c)}$; de ce dernier résultat on en déduit d'ailleurs facilement d'autres par transformation continue; ainsi, si on le transforme en B, A_1 devient A′, pied de la bissectrice intérieure de A, C′ devient C_1 pied de la bissectrice extérieure de C et l'on a $A'C_1 = \frac{4S\,d_c}{(a+b)(b+c)}$.

Ainsi, $B'_cB'_a$ et $C'_bC'_a$ se coupent en un point λ_a,

$C'_bC'_a$ et $A'_cA'_b$ » » λ_b,

A'_cA_b et B'_cB_a » » λ_c.

Les trois droites $A\lambda_a$, $B\lambda_b$, $C\lambda_c$ concourent au point $\frac{b+c}{p-a}$ etc , l'axe d'omologie de ABC et de $\lambda_a\lambda_b\lambda_c$ est $\sum \frac{ax}{b+c} = 0$.

Ces résultats en donent d'ailleurs encore d'autres par transformation continue.

Soit M_a le point où se coupent $A_cA'_b$, A'_cA_b; AM_a coupe BC en α, on a de même les points β, γ. α, β, γ sont sur la droite $\sum \frac{x}{b^2-c^2} = 0$.

$A_bA'_c$, A'_bA_c, se coupent en M_a; AM_a, coupe BC en μ_a; μ_a, μ_b, μ_c sont sur la droite $\sum \frac{x}{b^2-c^2} = 0$.

A_bA_c, $A'_bA'_c$ se coupent en M'_a; AM'_a, BM'_b, CM_c se coupent au point b^2-c^2, c^2-a^2, a^2-b^2 sur l'axe antiortique et sur la droite $\sum a^2x = 0$, $M_aM'_a$, $M_bM'_b$, $M_cM'_c$ sont paralèles à la droite de Lemoine. Etc., etc.

10. — *a) Construction du point* $a^2(b-c)$, etc.

C'est l'intersection de la droite $\sum (b+c)\,x = 0$ et de la droite de Lemoine.

La transformation continue en A permet de construire les points $a^2(b-c)$, $-b^2(c+a)$, $c^2(a+b)$, etc.

b) Construction du point $a(p-a)$, etc.

Il est sur la droite qui joint le pôle A′ d'un côté par raport au cercle circonscrit au pied de la bissectrice sur ce côté.

On construit de même les transformés continus $-ap$, $b(p-c)$, $c(p-b)$, etc., du point $a(p-a)$, etc.

*

11. — *a*) La droite de Wallace, paralèle à la droite de Lemoine, est la droite de Wallace du point de Tarry.

La droite de Wallace (ou de Simson) paralèle à l'axe antiortique est la droite de Wallace du point : $\frac{1}{2R - r - r_a}$, etc. On en déduit par transformation continue en A : la droite de Wallace paralèle à la droite $-x + y + z = o$ est la droite de Wallace du point

$$-\frac{1}{2R + r + r_a}, \quad \frac{1}{2R + r_a - r_c}, \quad \frac{1}{2R + r_a - r_b}.$$

b) Si l'on diminue de $\frac{p^2}{\delta}$ les distances du point $(p - a)$, $(p - b)$, $(p - c)$ aus trois côtés, les diférences $-\frac{ap}{\delta}$, $-\frac{bp}{\delta}$, $-\frac{cp}{\delta}$ sont proportionèles aus trois cotés. Si par les points ainsi obtenus sur les perpendiculaires aus côtés, on mène des paralèles aus côtés corespondants, on obtient un triangle dont le centre d'omotétie avec ABC est le point de Lemoine de ABC.

La transformation continue en A done la propriété analogue du point p, $p - c$, $p - b$ transformé continu de $p - a$, $p - b$, $p - c$.

c) Soit M un point du plan d'un triangle; je mène par M des paralèles aus trois côtés.

La paralèle à BC coupe AC en A_c, AB en A_b,
» CA » BA en B_a, BC en B_c,
» AB » CB en C_b, CA en C_a.

Cela posé, pour le point : $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}$, on a :

1° $$\frac{MA_b.MA_c}{a^3} = \frac{MB_c.MB_a}{b^3} = \frac{MC_a.MC_b}{c^3} = \frac{abc}{(bc + ca + ab)^2};$$

2° $$MB_a.MC_a = MC_b.MA_b = MA_c.MB_c = \frac{a^2b^2c^2}{(bc + ca + ab)^2};$$

3° Pour le point $\frac{-bc + ca + ab}{a^2}$, etc., la some des produits $MB_a.MC_a + MC_b.MA_b + MA_c.MB_c$ est maximum et a pour valeur :

$$\frac{a^2b^2c^2}{16\rho RS - (p^2 - r\delta)^2 - 4S^2} = \frac{a^2b^2c^2}{(\sqrt{b}.\sqrt{c} + \sqrt{c}.\sqrt{a} + \sqrt{a}\sqrt{b})\,\Pi\,(-\sqrt{b}.\sqrt{c} + \sqrt{c}.\sqrt{a} + \sqrt{a}.\sqrt{}}$$

La transformation continue apliquée à ces téorèmes en done de nouveaus.

d) Si M, M', M'' sont les trois points colinéaires a^2, b^2, c^2 ; $a^2 - bc$, etc., et le baricentre on a :

$$\frac{\text{M'M}}{\text{MM''}} = \frac{6\text{R}r}{p^2 - r\delta}.$$

La transformation continue done les téorèmes corélatifs concernant les points a^2, b^2, c^2 ; $-(a^2 - bc)$, $b^2 + ac$, $c^2 + ab$ et le baricentre.

La tangente comune au cercle inscrit et au cercle d'Euler (des 9 points) touche la conique inscrite de Steiner au point dont les coordonées normales absolues sont $\frac{\text{S}}{p^2 - 2r\delta} \frac{(b-c)^2}{a}$, etc.

La transformation continue done les téorèmes corélatifs se raportant aus cercles ex-inscrits.

e) Le centre radical de 3 cercles A$(b-c)$, B$(c-a)$, C$(a-b)$ décrits de A, B, C come centres avec $b-c$, $c-a$, $a-b$ come rayons, est le point de Nagel $\frac{p-a}{a}$, etc.

La transformation continue en A montre que l'axe radical des trois cercles A$(b-c)$, B$(c+a)$, C$(a+b)$ est le point $\frac{p}{a}$, $\frac{p-c}{b}$, $\frac{p-b}{c}$.

f) Si la médiane AL d'un triangle rencontre en α la droite qui joint les points C' et B' de contact du cercle inscrit sur AB et sur AC, on a :

$$\frac{\text{C}'\alpha}{\alpha\text{B}'} = \frac{b}{c}.$$

Si la simédiane AL_1 d'un triangle rencontre en α' cète ligne B'C', on a :

$$\frac{\text{C}'\alpha'}{\alpha'\text{B}'} = \frac{c}{b}.$$

En apliquant la transformation continue en A, en B et en C à ces deus téorèmes, on a imédiatement, en grandeur et en signe, les raports dans lesquels les médianes et les simédianes divisent les côtés corespondants des triangles dont les somets sont les points de contact des cercles ex-inscrits avec les côtés.

g) La droite $\sum ax(b-c)\cos\text{A}$, qui passe par l'ortocentre et par le point $\frac{b+c}{a^2}$, etc., où èle coupe l'iperbole de Kiepert, est tèle que si λ, μ, ν sont les distances d'un de ses points aus hauteurs ; on a $\lambda + \mu + \nu = 0$.

Le point à l'infini sur cète droite est $1 - \cos\text{B} - \cos\text{C}$, etc. ou

$r_a + r - 2R$, etc. on a des téorèmes analogues déduits par transformation continue.

h) Le triangle pédal du centre du cercle inscrit au triangle ABC a pour point de Lemoine le point de Gergonne de ABC, pour ortocentre le point $\frac{b+c}{p-a}$, etc., pour centre de gravité le point $\delta + r_a$, $\delta + r_b$, $\delta + r_c$.

La transformation continue multiplie ces résultats.

B. — Quelques propriétés des iperboles Γ_a, Γ_b, Γ_c.

Nous avons doné dans nos précédents mémoires présentés à divers congrès de l'AFAS, de nombreuses propriétés des coniques Γ_a, Γ_b, Γ_c, iperboles équilatères circonscrites qui se rencontrent si souvent dans la géométrie du triangle qu'èles sont peut-être le triple de coniques circonscrites, le plus important. En voici quelques nouvèles propriétés :

Nous rapelons que Γ_a est la courbe inverse de la médiatrice de BC, Γ_b, etc., et que Γ_a a pour centre le milieu de BC, et qu'èle a pour équation :

$$\frac{b^2 - c^2}{x} + \frac{ab}{y} - \frac{ac}{z} = 0.$$

a) Γ_a coupe en A_1 la paralèle menée par A à BC ; Γ_b done de même le point B_1, etc. Les trois points A_1, B_1, C_1 sont sur la droite $\sum a^3x(b^2 + c^2) = 0$, paralèle à la direction $a(b^2 - c^2)$, etc, de la droite de Lemoine.

b) Γ_a est aussi le lieu des points M tels que $\widehat{MBC} = \widehat{MCB}$.

c) Èle coupe le cercle circonscrit à l'extrémité du diamètre passant par A.

d) L'axe transverse de Γ_a (on supose $B > C$) fait avec BC un angle $\widehat{DLB}$ de $45^\circ - \frac{B - C}{2}$. L est le milieu de BC, centre de Γ_a, D le point où l'axe transverse coupe BA. $\widehat{LDB} = 45^\circ + \frac{A}{2}$.

5. — Γ_a coupe $a^2x^2 - bcyz = 0$ (élipse omotétique à l'élipse de Steiner passant au baricentre) suivant une droite D_a. Avec Γ_b et la courbe $b^2y^2 - acxz = 0$, on a une droite D_b, etc.

Les trois droites D_a, D_b, D_c se coupent au point Φ : $\frac{a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2}{a}$, etc., D_a passe par l'associé en A — $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ du centre de gravité, et par le pied, sur BC, de la simédiane.

6. — Γ_a et l'ellipse tangente à AC en C et à AB en B et passant au point de Lemoine, se coupent suivant une droite D'_a. Les trois droites D'_a, D'_b, D'_c se coupent au point a^3, b^3, c^3. D'_a passe aussi au pied de la simédiane sur BC.

7. — Γ_a coupe l'ellipse circonscrite de Steiner en V_a; V_a, V_b, V_c concourent au point $\frac{1}{a^3}$, etc.

8. — Le $\frac{1}{2}$ axe transverse ($B > C$) de Γ_a est $\frac{1}{2}\sqrt{(b^2 - c^2)\sin A}$.

9. — La tangente à l'ortocentre est paralèle à la droite qui joint le point A au point $\frac{1}{\cos A - \cos B \cos C}$, etc.

10. — Γ_a coupe l'élipse circonscrite de Steiner au point E_a, $\frac{1}{a(b^2 - c^2)}$, $\frac{1}{b^3}$, $\frac{1}{c_3}$; les trois droites AE_a, BE_b, CE_c concourant au point D : $\frac{1}{a^3}$, etc., si souvent rencontré.

C. — Sur quelques cubiques liées au triangle.

a) Si M est un point de la cubique $\sum x(y^2 - z^2)\cos A = 0$ qui est sa propre inverse, on a : $\widehat{MAC} + \widehat{MBA} + \widehat{MCB} = \widehat{MAB} + \widehat{MBC} + \widehat{MCA}$.

La cubique passe par les points A, B, C, O, o, o_a, o_b, o_c, H et coupe BC, CA, AB aus mêmes points que AO, BO, CO.

b) M est un point de coordonées normales x, y, z ; AM, BM, CM coupent BC, CA, AB en A′, B′, C′; A_1, B_1, C_1 sont les milieus des hauteurs. Si A_1A', B_1B', C_1C' concourent en N, le lieu de M est la cubique

$$\sum yz(b^2y\cos C - c^2z\cos B) = 0 \quad \text{et le lieu de N, la cubique}$$

$$\sum ayz(by - cz) = 0.$$

c) Soit M_1 un point du plan du triangle ABC.

Apelons M_a, M_b, M_c les simétriques de M par raport à BC, CA, AB.

Si M_1 décrit la cubique :

$$(1) \qquad \sum x(y^2 - z^2)(\cos A - 2\cos B\cos C) = 0,$$

les trois droites AM_a, BM_b, CM_c concoureront en M′ qui décrira la cubique :

$$(2) \qquad \sum ayz(cy \cos C \sin 3B - bz \cos B \sin 3C) = 0.$$

Si un point M décrit la cubique :

$$(3) \qquad \sum x(y^2 - z^2)(\cos A - \cos B \cos C) = 0,$$

et que μ_a, μ_b, μ_c soient les projections de M sur BC, CA, AB, les trois droites $A\mu_a$, $B\mu_b$, $C\mu_c$ concourront en M″ dont le lieu sera la cubique :

$$(4) \qquad \sum yz(b^2y \cos C - c^2z \cos B) = 0.$$

Les cubiques (1) et (3) sont à èles-mêmes leur propre inverse.

Les cubiques (1) et (3) ont pour points comuns l'ortocentre, le centre du cercle circonscrit, les trois somets et les quatre centres des cercles tritangents à ABC.

La cubique (3) est aussi le lieu des points M tels qu'il y a une conique circonscrite à ABC et qui a AM, BM, CM pour normales en A, B, C.

Èle passe par le point J : cos A — cos B cos C, etc., qui est le simétrique de l'ortocentre H par raport au centre O du cercle circonscrit.

Èle a O pour centre.

Èle touche en A la droite qui joint A à l'inverse de J.

La tangente en o est $\sum ax(p - a)^2(b - c) = 0$.

Par transformation continue en A, on voit *imédiatement* que la tangente en o_a est : $axp^2(b - c) + by(p - c)^2(c + a) - cz(p - b)^2(a + b) = 0$.

Èle touche en O la droite Oo.

Èle touche en H la droite $\sum x \cos^2 A(b^2 - c^2)bc = 0$ qui passe au point : $\dfrac{\text{tang A}}{\cos A}$, etc.

D. — Quelques remarques a propos des Angles de Steiner et des Cercles de Neuberg.

a) La some des angles de Steiner ω_1, ω_2 *et de l'angle* ω *de Brocard égale 90°, c'est-à-dire* que $\omega_1 + \omega_2 + \omega = 90°$.

C'est une remarquable relation puisqu'èle a lieu entre les angles eus-mêmes ; èle avait passé inaperçue, quoiqu'èle soit implicitement contenue dans le mémoire que MM. Neuberg et Gob ont présenté au Congrès de

Paris, à l'AFAS, en 1889. En èfet, pour calculer les valeurs de cotg ω_1 et de cotg ω_2 en fonction de ω, ces géomètres ont écrit les équations $2\omega_1 = 90^\circ - \omega - \lambda$, $2\omega_1 = 90^\circ - \omega + \lambda$, λ désignant un certain angle qu'ils considéraient. En ajoutant, on trouve imédiatement $\omega_1 + \omega_2 + \omega = 90^\circ$. Il est donc impossible de passer plus près de ce résultat, d'autant plus qu'il se voit aussi sur la figure tracée dans le mémoire; ils ne l'ont point observé, probablement, parce que le but du calcul était de trouver une expression de cotg ω_1 et de cotg ω_2, et que, de plus, on cherche rarement une relation directe entre trois angles.

b) Soit ABC un triangle, N_a, N_b, N_c les centres des cercles de Neuberg, les tangentes en A, B. C à N_a, N_b, N_c se coupent au point de Steiner.

c) BA et CA coupent N_a en A'_b, A'_c; CB et AB coupent N_b en B'_c, B'_a; AC et BC coupent N_c en C'_a, C'_b. Les droites A'_bA_c, $B'_cB'_a$, $C'_aC'_b$ sont paralèles à la droite de Lemoine de ABC.

d) Les coordonées de N_a sont : $-\cos\omega$, $\cos(C+\omega)$, $\cos(B+\omega)$; si par N_a, N_b, N_c on mène des paralèles respectivement à BC, CA, AB, on a un triangle $A'B'C'$ qui a le point de Lemoine pour centre d'omotétie avec ABC, le raport d'omotétie $\dfrac{B'C'}{BC} = \cot g^2\omega - 1$.

e) Si BC reste fixe et que A décrive le cercle N_a, l'envelope de $A'_bA'_c$ est une élipse et le point de Lemoine décrit une paralèle à BC.

f) L'angle x sous lequel on voit, de deus somets d'un triangle, le cercle de Neuberg corespondant au côté qui contient ces deus somets est doné par $\cos\dfrac{x}{2} = 2\sin\omega$.

E. — Divers Résultats concernant des Coniques remarquables.

a) Si M′ et M″ sont deus points inverses x, y, z; $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{y}$, $\dfrac{1}{z}$, que AM′, BM′, CM′ coupent BC, CA, AB en A′, B′, C′ et que AM″, BM″, CM″ coupent BC, CA, AB en A″, B″, C″, les six points A′, B′, C′, A″, B″, C″ sont sur la conique $xyz\sum X^2 - \sum YZx(y^2+z^2) = 0$.

b) La parabole circonscrite P_a dont la corde BC intercepte sur la courbe l'aire minima $\dfrac{4S}{3}$ a pour équation : $\dfrac{4yz}{a} + \dfrac{zx}{b} + \dfrac{xy}{c} = 0$.

c) L'iperbole équilatère circonscrite dont la tangente en A est paralèle à BC a pour équation $-\frac{a}{x}+\frac{c\cos A}{y}+\frac{b\cos A}{z}=0$.

d) La parabole $\sum \frac{x^2}{a^2(b^4-c^4)}=0$ touche la droite de Lemoine au point $a(b^4-c^4)$ où cète droite coupe la droite de de Longchamps $\sum a^3x=0$.

e) La conique $\sum \frac{a}{x\cos^2 A}=0$ circonscrite à ABC coupe les hauteurs en A′, B′, C′ ; en ces points les hauteurs sont normales à la conique.

Les coordonées de A′ sont : $-\frac{\cos^2 B\cos^2 C}{\cos^2 A}$, $\cos C$, $\cos B$.

C'est une iperbole, une parabole ou une élipse suivant que $(\cos A-\cos B\cos C)(\cos B-\cos C\cos A)(\cos C-\cos A\cos B)$ est négatif, nul ou positif.

f) La conique circonscrite qui a CA pour normale en C et BC pour normale en B a pour équation :

$$yz\cos C+zx+xy\cos B\cos C=0. \tag{1}$$

La conique circonscrite qui a CB pour normale en C et AB pour normale en B a pour équation :

$$yz\cos B+zx\cos B\cos C+xy=0. \tag{2}$$

(1) et (2) se coupent au point A_1 : $\frac{\operatorname{cotg} A}{a}$, etc.

La conique circonscrite E_a dont l'un des axes est BC a pour équation $\frac{1}{x}+\frac{\cos C}{y}+\frac{\cos B}{z}=0$; E_b, E_c se coupent en M_a, AM_a, BM_b, CM_c se coupant au point $\cos A-\cos B\cos C$, etc.

L'autre axe de E_a est $\frac{2S}{\sqrt{bc\cos B\cos C}}$.

La tangente en A est la droite $y\cos B+z\cos C=0$, conjuguée armonique de la hauteur par raport à AC et AB.

g) Si une parabole variable est circonscrite à un triangle ABC, les points de Frégier des somets décrivent des coniques.

Le point de Frégier en A de la conique $\frac{L}{x}+\frac{M}{y}+\frac{N}{z}=0$ est :

$$L\cos A,\ N-M\cos A,\ M-N\cos A.$$

Le point de Frégier en un point d'une iperbole équilatère est à l'infini ; on peut énoncer ainsi ce téorème :

Soient P et Q deus points d'une iperbole équilatère, le cercle décrit sur PQ comme diamètre coupe la courbe en P' et Q'. La droite P'Q' est un diamètre et les normales à la courbe en P' et en Q' sont paralèles à PQ.

Le lieu des points de Frégier du point C des coniques circonscrites à ABC et qui passent par le point x_1, y_1, z_1 est la droite :

$$x \cos C\,(y_1 \cos C + x_1)\, z_1 + y \cos C\,(y_1 + x_1 \cos C)\, z_1 + z x_1 y_2 \sin^2 C = 0.$$

h) Si par un point de la conique inscrite de Steiner, on mène des paralèles aux trois côtés d'un triangle ABC, èles divisent le triangle en trois triangles et en trois paralélégrames. La some des surfaces des trois triangles égale la some des surfaces des trois paralélégrames.

i) Le centre de l'iperbole de Kiepert est sur l'élipse inscrite de Steiner.

La tangente en ce point à l'élipse de Steiner est : $\sum \dfrac{ax}{b^2 - c^2} = 0.$

La tangente en ce même point au cercle d'Euler est $\sum ax \dfrac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2} = 0.$

Le pied de la quatrième normale abaissée du centre du cercle circonscrit sur l'élipse de Steiner est le point diamétralement oposé au centre de l'iperbole de Kiepert.

De la remarque que le centre de l'iperbole de Kiepert est sur la conique inscrite de Steiner on peut tirer une construction géométrique simple de ce point; en éfet come ce centre est aussi sur le cercle d'Euler, il sufit de trouver le quatrième point comun à l'élipse de Steiner et au cercle d'Euler qui ont trois points conus, savoir les milieus L, M, N des trois côtés de ABC. L'élipse de Steiner passe aussi sur les milieus g_b, g_c des droites qui joignent B et C au baricentre. On aplique la construction que j'ai donée (Congrès de Caen 1894 construction V) pour trouver le quatrième point comun à un cercle LMN et à une conique LMN g_b g_c et qui est la plus simple que je conaisse, la voici :

Je trace g_cL qui coupe le cercle LMN en I, par I je mène la paralèle à BC qui coupe le cercle en K, je trace Kg_b qui coupe le cercle LMN au point cherché.

F. — Varia

1. — A propos d'une question que j'ai posée, il y a quelques années, dans le *Progreso matematico* et dans laquèle je demandais, entre autres choses, de démontrer que l'ortocentre ne pouvait jamais être sur le cercle de Brocard, M. Ripert me comunique un téorème que je tiens à signaler

parce qu'il domine la solution dans les sujets analogues à celui qui faisait l'objet de ma question.

Apelons Z un point déterminé du plan de ABC, nous suposons que Z est un point unique tel que G, H, K, O, etc., ou acouplé tel qu'un point de Brocard, mais à l'exclusion des points d'un triple tel que les trois *associés* d'un point ou les centres des cercles de Neuberg, etc. Soit en outre une courbe continue $\sum$ quelconque dont l'équation est simétrique par raport aus trois coordonées.

Si le point Z ne peut être sur la courbe $\sum$ pour aucun triangle isocèle il ne peut s'y trouver pour aucun autre triangle.

Considérons en éfet tous les triangles pour lesquels Z serait sur la courbe $\sum$ corespondante ; nous pouvons suposer BC constant, il est visible qu'à tout triangle ABC satisfaisant à la question, corespond un triangle BCA′ simétrique de BCA par raport à la médiatrice de BC.

Le lieu des points (Z, Z′) de ces triangles sera une certaine courbe simétrique par raport à cète médiatrice qui la coupera toujours puisque Z étant par ipotèse unique ou acouplé il y a toujours au moins un triangle isocèle (le triangle équilatéral) qui satisfait à la question, etc.

2. — Soient A′ et A″ les points où la simédiane et la droite de Lemoine rencontrent BC; B′ et B″; C′ et C″ les points analogues sur CA et sur AB. Les trois circonférences qui ont pour diamètres A′A″, B′B″, C′C″ se coupent en deus points τ tels que les côtés du triangle podaire de τ sont inversement proportionels aus côtés de ABC.

3. — Si x_a, x_b, x_c, X sont les distances de A, B, C et du point de Gergonne du triangle ABC à une droite quelconque, on a :

$$X = \frac{x_a r_a + x_b r_b + x_c r_c}{\delta}.$$

4. — Construction du point a tg A, etc.

Il est sur la droite qui joint le pôle A′ d'un côté par raport au cercle circonscrit, au pied de la hauteur de ce côté.

5. — Si l, m, n, sont les côtés du triangle podaire du point M, on a :

$$16RS^4 + R\sum l^4b^2c^2 - 2S\sum a\cos A(l^2b^2c^2 + 4R^2m^2n^2) = 0.$$

Cela se déduit ainsi :

Si X, Y, Y sont les distances de M aux somets de ABC, on sait que l'on a :

$$(1) \qquad a^2b^2c^2 + \sum a^2X^4 - 2\sum bc\cos A(a^2X^2 + Y^2Z^2) = 0,$$

d'autre part on a :

$$(2) \qquad \frac{X}{l} = \frac{2R}{a}, \qquad \frac{Y}{m} = \frac{2R}{b}, \qquad \frac{Z}{n} = \frac{2R}{c}$$

après substitution dans (1) des valeurs de X, Y, Z tirées des équations (2) on arive à la relation cherchée.

Aplication. *Trouver la longueur* x *des côtés des triangles podaires équilatéraux.*

On trouve : $$x = 2S\sqrt{\frac{(p^2 - r\delta) \pm 2S\sqrt{3}}{(p^2 - r\delta)^2 - (2S\sqrt{3})^2}}$$

ou $$x'^2 = \frac{4S^2}{(p^2 - r\delta) + 2S\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad x''^2 = \frac{4S^2}{(p^2 - r\delta) - 2S\sqrt{3}}$$

On peut remarquer qu'on en déduit $\frac{1}{x'^2} + \frac{1}{x''^2} = \frac{\operatorname{cotg}\omega.}{S}$

6. — Soit ABC un triangle $A_1\ B_1\ C_1$ le triangle podaire du point M (x, y, z). On prend sur B_1C_1 le point A_2 tel que $\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} = \frac{\overline{B_1A_2}}{\overline{A_2C_1}}$ et de même les points B_2, C_2 sur C_1A_1, A_1B_1.

1° A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 concourent au point N dont les coordonées sont $\frac{by + bz}{a}$, etc.

2° La droite MN passe toujours par le baricentre, son équation est $\sum a\xi(by - cz) = 0$.

On retrouve ainsi une série de téorèmes concernant les points remarquables particuliers, ainsi

Si M est 1° Le point Φ; 2° $\frac{1}{a^2}$, etc.; 3° le point de Steiner; 4° le point de Nagel; 5° le centre du cercle inscrit, etc.; N est 1° Le point $\frac{1}{a^3}$, etc.; 2° $a(b^2 + c^2)$, etc., milieu de $\omega\omega'$; 3° le centre de l'iperbole de Kiepert;

4° le centre du cercle inscrit; 5° le centre de gravité du périmètre, etc. La droite MN est 1° $\sum a^3x(b^2 - c^2) = 0$; 2° $\sum ax(b^4 - c^4)$;

$$3^\circ \sum a(b^2 - c^2)^2 = 0 ;\ 4^\circ \text{ et } 5^\circ\ oG.$$

7. — ω et ω' étant les points de Brocard, $A\omega$ et $A\omega'$ coupent le cercle circonscrit en deus points A_ω, $A_{\omega'}$ on a de même B_ω, $B_{\omega'}$; $C_{\omega'}$, C_ω. Le triangle formé par les trois droites $A_\omega A_{\omega'}$, etc., a pour centre d'homotétie avec le triangle ABC le point a^3, b^3, c^3.

8. — Soient un triangle ABC, une droite Δ qui coupe les côtés BC, CA, AB en A′, B′, C′ et une conique circonscrite K. Soit μ un point de Δ, $A\mu$, $B\mu$, $C\mu$ coupant la conique en α, β, γ. Les droites $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ concourent en un point M de K. Ce téorème a une certaine importance dans la géométrie du triangle parce qu'il est une mine abondante de téorèmes sur les points, les coniques et les droites remarquables. Il sufit d'en particulariser les donées.

9. — Soit un point M dont les coordonées normales sont x, y, z, P_a la projection de M sur BC, Q_a la projection de M sur la hauteur partant de A. Il y a de même les points P_b, Q_b; P_c, Q_c. On sait (Mathesis 1900, p. 152 Sporer) que P_aQ_a, P_bQ_b, P_cQ_c concourent en un point N. Cela posé, les coordonées de N sont $ax[x(- x \cos A + y \cos B + z \cos C) + yz]$, etc.

Si M est le centre du cercle inscrit ou d'un cercle ex-inscrit, N est l'inverse du point de Nagel ou d'un de ses transformés continus. Si M est le baricentre, N est le point $\frac{1}{a}(3a^2 - b^2 - c^2)$, etc.

10. — Soit un triangle ABC. Toujours du côté oposé au somet du triangle ou toujours du même côté que lui, je construis des triangles isocèles semblables BA_1C, CB_1A, AC_1B dont l'angle à la base est $\varphi < 90$ et des triangles isocèles semblables BA'_1C, CB'_1A, AC'_1B dont l'angle à la base est $90 - \varphi$. On sait que AA′, BB′, CC′ concourent en N et que AA'_1, BB'_1, CC'_1 concourent en N_1, deus points apartenant à l'iperbole de Kiepert. La droite NN_1 passe au centre du cercle circonscrit.

1 — Soient ω l'angle de Brocard et φ l'angle de Boutin tel que

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C$$

d'un triangle et D la distance de l'ortocentre au centre du cercle circonscrit, on a :

$$\operatorname{cotg} \omega - \operatorname{cotg} \varphi = \frac{2R^2}{S}; \quad \operatorname{cotg} \omega . \operatorname{tg} \varphi = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8R^2 \cos A \cos B \cos C}$$

$$= \frac{p^2 - r\delta}{p^2 - (2R + r)^2} \quad \text{et} \quad \operatorname{cotg}\varphi = \frac{R^2 - D^2}{4S}$$

Les demi-axes de l'élipse circonscrite qui a pour centre le centre du cercle circonscrit (Voir Congrès de Bordeaux, 1895) sont $\frac{R \pm D}{2}$, expression beaucoup plus simple que cèle que nous y avons donée. On sait (Brocard, Congrès d'Alger, 1881) que si les droites qui joignent les points de Brocard ω, ω' aus somets coupent les côtés oposés en α, β, γ; α', β', γ' les deus triangles $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ ont même surface $\frac{2S \sin^2 \omega}{1 + \cos^2 \omega + 2 \cos A \cos B \cos C}$ remarquons qu'il vaut mieus la représenter ainsi $\frac{2a^2b^2c^2S}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)}$.

12. — L'angle de Lemoine θ', c'est-à-dire l'angle de Brocard du faisceau des simédianes (Voir J. E., 1883, p. 214) est doné par la formule

$$\cot \theta' = \frac{48S^2 + m^4}{8m^2S} \quad \text{où } m^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

13. — Si l'on prend le point A′ où l'axe ortique coupe BC et que l'on joigne A′ au baricentre, tout point M de cète droite jouit de la propriété suivante : Si par M je mène des paralèles à AB et à AC les milieus β et γ des parties de ces paralèles comprises entre les deus autres côtés sont sur une perpendiculaire à BC.

14. — Soit un triangle ABC ; une droite $Lx + My + Nz = 0$ coupe les trois côtés BC, CA, AB en L, M, N. On sait que les trois cercles AMN, BNL, CLM se coupent en un point P du cercle circonscrit à ABC.

Si R_a, R_b, R_c sont les rayons des cercles circonscrits aus triangles AMN, BNL, CLM on a : $aR_a + bR_b + cR_c = 0$.

15. — Le lieu des points M du plan d'un triangle ABC tels qu'en les projetant en A′, B′, C′ sur les côtés BC, CA, AB on ait $A'B' = C'A'$, est le cercle d'Apollonius $y^2 - z^2 - 2zx \cos B + 2xy \cos C = 0$. Come ce cercle coupe le cercle circonscrit au même point A_1 que la simédiane partant de A, on voit que la droite de Wallace (ou de Simson) corespondant à A_1 est partagée en son milieu par la droite BC.

La droite de Wallace du point de Tarry est paralèle à la droite de Lemoine.

16. — Soient ABC un triangle et x, y, z, des quantités que je supose représenter les coordònées normales d'un point M du plan de ABC.

Les cercles A (ρx), B (ρy), C (ρz) si ρ varie ont leur centre radical décrivant la droite $\sum aX[x^2(b^2 - c^2) - b^2y^2 + c^2z^2] = 0$ qui passe, naturèlement, toujours en O. Si M est le point $(p - a)$, etc., la droite est Oo.

Si M est le baricentre ou le point Φ, c'est la droite KO.

Si M est le point de Lemoine, c'est la droite d'Euler.

17. — Si l'on a $bc = a(b \pm c)$, ou si une hauteur égale la some ou la diférence des deus autres, les points de Brocard et le point $a^{\frac{1}{3}}$, etc., sont sur la conique inscrite de Steiner, alors on a : $h_a = h_b \pm h_c$.

18. — Dans un triangle ABC si l'angle de Brocard égale B — C ou C — B, on a : $b^4 = c^2(a^2 + b^2)$ ou $c^4 = b^2(a^2 + c^2)$.

S'il est égal à $\frac{1}{2}$ (B — C) ou à $\frac{1}{2}$ (C — B) on a : $\frac{a^2}{b^2} = \frac{b - c}{c}$ ou $\frac{a^2}{c^2} = \frac{c - b}{b}$.

19. — Si l'on mène par le point Φ, des paralèles aus trois côtés, les périmètres des trois triangles que chacune de ses paralèles fait avec les deus autres côtés sont proportionels à $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}$.

Si l'on a $a^2b^2 = c^2(a^2 + b^2)$ le point Φ (voir Congrès de Carthage 1896) est sur la símédiane partant de C ; si l'on a $ab = c(a + b)$, il est sur la bissectrice partant de C et $h_c = h_a + h_b$; si $ab = \pm c(a - b)$, il est sur la bissectrice extérieure et $h_c = \pm(h_a - h_b)$.

20. — L'iperbole circonscrite qui contient les points de Brocard coupe l'iperbole de Kiepert au point $\frac{1}{a(b^2 + c^2)}$, etc. inverse du milieu de la distance des points de Brocard, son centre est le point $\left(\frac{a^2 - bc}{a}\right)^2$, etc.

21. — Si l'on décrit les trois circonférences A (ρ), B (ρ), C (ρ), puis les cercles de centres A, B, C et respectivement ortogonaus à C (ρ), A (ρ), B (ρ), ces trois cercles ont le même centre radical quel que soit ρ. Il en est de même des trois circonférences de centres, A, B, C et respectivement ortogonales à B (ρ), C (ρ), A (ρ).

22. — Soient A′B′C′ le triangle ortique de ABC, A″, B″, C″ les projections de A, de B et de C sur B′C′, C′A′, A′B′ ; les trois droites A′A″, B′B″, C′C″ concourent au point : cos A ($\cos^2$ B + $\cos^2$ C), etc.

23. — Lorsque trois droites concourantes partant des somets d'un triangle ABC, coupent les côtés oposés en A_1, B_1, C_1 et que les longueurs AA_1, BB_1, CC′ sont désignés par l, m, n, les trois simétriques de ces droites par raport aux hauteurs avec lesquèles èles ont une extrémité comune, concourront également si l'on a

$$\sum(b^2 - c^2)(a^2l^2 + m^2n^2) = 0.$$

24. — M. Maurice d'Ocagne a signalé que si l'on prend sur les hauteurs les points A′, B′, C′ aus $\frac{2}{3}$ de ces hauteurs à partir de A, B, C, le cercle

circonscrit à A′B′C′ passe à l'ortocentre et que ce triangle est inversement semblable à ABC, Cela posé si l'on apèle D la distance du centre du cercle circonscrit à l'ortocentre, on trouve que le raport de similitude est :

$$\frac{BC}{C'B'} = \frac{3R}{D}.$$

L'équation de ce cercle est $2\sum ax^2 \cos A - \sum ayz = 0.$

Les coordonées normales absolues du centre de cète circonférence sont $\frac{4S}{3a} - R \cos A$, etc.

Les perpendiculaires abaissées de A, B, C sur B′C′, C′A′, A′B′, concourent au point $\frac{1}{\cos A - 4 \cos B \cos C}$, etc.

25. — Si H_j est le point cos A — cos B cos C, etc., simétrique de H pour raport à O on a :

$$a^2 - \overline{AH}^2 = b^2 - \overline{BH}_j^2 = c^2 - \overline{CH}_j^2 = 16\, R^2 \cos A \cos B \cos C$$
$$= 4\,[p^2 - (2R + r)^2].$$

Ces relations sont à remarquer parce qu'èles donent une expression assez simple de la distance du point H_j aus trois somets et que ces distances pour les points remarquables sont le plus souvent compliquées.

26. — Le cercle conjugué ne peut être tangent au cercle de Brocard que si l'on a $\sum\frac{(b^4 + c^4 - a^4)^2}{b^2 + c^2 - a^2} = 0$. Cète condition équivaut à :

$$1 - 16 \cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C = \left(\frac{b^2 - c^2}{a^2}\right)^2 \left(\frac{c^2 - a^2}{b^2}\right)^2 \left(\frac{a^2 - b^2}{c^2}\right)^2.$$

Il y a éfectivement des triangles ABC qui répondent à cète condition, par exemple les triangles où l'on a : $b = c$, et $\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}}$.

On trouve facilement la condition de contact en exprimant que l'axe radical $\sum ax\,(b^4 + c^4 - a^4) = 0$ du cercle conjugué et du cercle de Brocard est tangent à ce dernier.

27. — Si M est un point du cercle conjugué à un triangle, les polaires de M par raport aus trois cercles décrits sur les côtés come diamètres sont concourantes.

28. — La ligne d'Euler est paralèle ou perpendiculaire à la bissectrice de l'angle A suivant que l'on a $A = 120°$ ou $A = 60$.

29. — OK n'est jamais paralèle à une bissectrice intérieure mais il l'est à la bissectrice extérieure de A si ABC est un triangle moyen en A ($a^2 = bc$).

30. — Si le triangle ABC est moyen en A, c'est-à-dire si $a^2 = bc$, la droite qui joint le point A au point de Steiner passe par l'intersection de la médiane partant de B et de simédiane partant de C et par le point d'intersection de la médiane partant de C et de la simédiane partant de B.

G. — FORMULES D'IDENTITÉS.

Dans la géométrie du triangle les formules d'identité, surtout cèles qui ont lieu entre les côtés et les angles dans un membre et R, p, r, etc. dans l'autre, ont une tèle importance, que très souvent arêté d'abord par la longueur de certains calculs lors des premiers temps de la géométrie du triangle, j'ai été amené à en calculer beaucoup et à en doner des séries dans divers mémoires, par ex. : (AFAS, Congrès de Toulouse (1887), d'Oran (1888), de Limoges (1890), de Marseille (1891), de Pau (1892), et surtout dans le mémoire : *Étude sur une nouvèle transformation* paru dans Mathesis (1891), lequel en contient plusieurs centaines. Come le nombre de ces identités est évidemment infini, les géomètres qui n'ont pas pratiqué personèlement la géometrie du triangle pouraient croire à l'inutilité de tels détails, mais ils n'ont qu'à se proposer de trouver sans leur secours certaines questions qui se résolvent *finalement* par un résultat simple et ils seront vite éclairés. Je citerai, au hasard, parmi èles, l'évaluation de la distance OJ des points O et J $\frac{1}{p-a}$, etc., qui est : $oO \cdot \frac{2R + r}{2R - r}$, ou cèle de la distance IJ (I étant le point $(p - a)$, etc.) donée par $\overline{IJ}^2 = \frac{4R^4}{\delta^2 d^4} [p^2 d(2R + 5r) - r\delta^3]$. Quant à moi, ces formules et la transformation continue me servent *constamment* pour tous mes mémoires relatifs à la géométrie du triangle et je crois utile d'ajouter encore ici un certain nombre de ces formules, qui toutes ont été rencontrées dans mes calculs, une ou plusieurs fois.

1. $\sum a(b + c) \cos A = \frac{r}{R}\left[p^2 + (2R + r)\delta\right]$.

Transformé en A : $-a(b + c) + b(a - c) \cos B + c(a - b) \cos C$

$= \frac{r_a}{R}\left[\delta_a(r_a - 2R) - (p - a)^2\right]$.

2. $\sum a^2(br_c + cr_b) = 2S[p^2 + (2R + r)\delta]$.

Transformé en A : $a^2(br_b + cr_c) - b^2(cr + ar_b) - c^2(br + ar_c)$
$= 2S[\delta_a(r_a - 2R) - (p - a)^2]$

3. $br_c + cr_b = \frac{S}{2rr_a}\left[a(b + c) - (b - c)^2\right]$.

Transformé en A : $br_b + cr_c = \frac{S}{2rr_a}\left[a(b + c) + (b - c)^2\right]$.

Transformé en B : $br_a + cr = \frac{S}{2r_br_c}\left[a(b - c) + (b + c)^2\right]$.

4. $\sum a(p - a)^2 \cos A = \frac{2S}{R}(2R^2 - 2Rr - r^2)$.

Transformé en A : $ap^2 \cos A + b(p - c)^2 \cos B + c(p - b)^2 \cos C$
$= \frac{2S}{R}\left[2R^2 + 2Rr_a - r_a^2\right]$.

5. $\delta = \frac{ap + r_a^2}{r_a} = r_a + a \operatorname{tg} \frac{A}{2}$.

Transformé en A : $\delta_a = \frac{a(p - a) - r^2}{r} = - r + a \operatorname{cotg} \frac{A}{2}$.

6. $r_a + r_b = \frac{pc}{r_c}$.

Transformé en A : $- r + r_c = \frac{(p - a)c}{r_b}$;

Transformé en B : $r_c - r = \frac{c(p - b)}{r_a}$; en C : $r_a + r_b = \frac{(p - c)c}{r}$.

7. $\sum a^6 = 2(p^2 - r\delta)^3 - 24p^2r^2(p^2 - r\delta) + 48p^2R^2r^2$.

Transformé en A donc : $\sum a^6 = 2\left[(p - a)^2 + r_a\delta_a\right]^3$
$- 24(p - a)^2r_a^2\left[(p - a)^2 + r_a\delta_a\right] + 48(p - a)^2R^2r_a^2$.

8. $\sum bcr_a^2 = r\left[\delta^3 - p^2(8R - r)\right]$.

Transformé en A : $- bcr^2 + car_c^2 + abr_b^2 = r_a\left[(p - a)^2(8R + r_a) - \delta_a^3\right]$

9. $\sum b^2c^2r_a = r\left[p^4 - 2p^2r(2R - r) + r\delta^3\right]$.

Transformé en A : $b^2c^2r_a - c^2a^2r_a - a^2b^2r_c$
$= r_a\left[(p - a)^4 + 2(p - a)^2r_a(2R + r_a) - r_a\delta_a^3\right]$.

10. $\sum \frac{r_a^2 \cos A}{a} = \frac{1}{4pR}\left[p^2(16R + r) - \delta^3\right].$

Transformé en A : $\frac{r^2 \cos A}{a} + \frac{r_c^2 \cos B}{b} + \frac{r_b^2 \cos C}{c}$

$= \frac{1}{4(p-a)R}\left[\delta_a^3 - (p-a)^2\left(16R - r_a\right)\right].$

11. $\sum \frac{a\left(r^2 + r_a^2\right)}{r_a - r} = 2p(2R + r).$

Transformé en A : $-\frac{a\left(r_a^2 + r^2\right)}{r_a - r} + \frac{b\left(r_a^2 + r_c^2\right)}{r_a + r_c} + \frac{c\left(r_a^2 + r_b^2\right)}{r_a + r_b}$

$= 2(p-a)\left(2R - r_a\right).$

12. $\sum a r_b^2 r_c^2 \cos A = \frac{2p^3 r}{R}\left[2R^2 - 2Rr - r^2\right].$

Transformé en A : $a r_b^2 r_c^2 \cos A + b r^2 r_b^2 \cos B + c r^2 r_c^2 \cos C$

$= \frac{2(p-a)^3 r_a}{R}\left[2R^2 + 2Rr_a - r_a^2\right].$

13. $\sum bc \cos^2 A = \frac{1}{R}\left[p^2(R - 2r) + Rr\delta\right].$

Transformé en A : $- bc \cos^2 A + ca \cos^2 B + ab \cos^2 C$

$= \frac{1}{R}\left[Rr_a\delta_a - (p-a)^2\left(R + 2r_a\right)\right].$

14. $\sum a \cos^2 A = \frac{p}{2R^2}\left[2(2R + r)(R + r) + r^2 - p^2\right].$

Transformé en A : $- a \cos^2 A + b \cos^2 B + c \cos^2 C$

$= \frac{p-a}{2R^2}\left[2\left(2R - r_a\right)\left(R - r_a\right) + r_a^2 - (p-a)^2\right].$

15. $\sum a^4 \cos A = \frac{r}{R}\left[5p^4 - 2p^2(8R^2 + 15Rr + 5r^2) + r\delta^2(2R + r)\right].$

Transformé en A : $- a^4 \cos A + b^4 \cos B + c^4 \cos C$

$= \frac{r_a}{R}\left[5(p-a)^4 - 2(p-a)^2\left(8R^2 - 15Rr_a + 5r_a^2\right) - r_a\delta_a^2\left(2R - r_a\right)\right].$

16. $\sum r_a \cos A = \frac{1}{R}(p^2 - R\delta).$

Transformé en A : $- r \cos A + r_c \cos B + r_b \cos C$

$= \frac{1}{R}\left[(p-a)^2 - R\delta_a\right]$

17. $\sum(b-c)(3a-2p)\cos A = \frac{p}{2Rr}(b-c)(c-a)(a-b)$.

Transformé en A : $-(b-c)(2a+b+c)\cos A$
$+(c+a)(-2b-a+c)\cos B-(a+b)(-2c-a+b)\cos C$
$=\frac{p-a}{2Rr_a}(b-c)(c+a)(a+b)$.

18. $\sum\frac{(b^2-c^2)^2}{a}=\frac{2p(R-2r)}{R}\left[p^2+r(2R+r)\right]$.

Transformé en A : $-\frac{(b^2-c^2)^2}{a}+\frac{(c^2-a^2)^2}{b}+\frac{(a^2-b^2)^2}{c}$
$=\frac{2(p-a)(R+2r_a)}{R}\left[(p-a)^2-r_a(2R-r_a)\right]$.

19. $\sum bc=p^2+r\delta$.

Transformé en A : $-bc+ac+ab=-(p-a)^2+r_a\delta_a$.

20. $a^2+b^2\cos C+c^2\cos B=2ap-bc(\cos B+\cos C)$.

Transformé en A : $a^2-b^2\cos C-c^2\cos B=bc(\cos B+\cos C)$
$-2a(p-a)$.

Transformé en B : $a^2-b^2\cos C+c^2\cos B=2a(p-b)$
$+bc(\cos B-\cos C)$.

21. $a\delta+br_c+cr_b=ar_c+b\delta+cr_a=ar_b+br_a+c\delta=2p(2R+r)$.

Transformé en A : $-a\delta_a+br_b+cr_c=-ar_b+b\delta_a-cr$
$=-ar_c-br+c\delta_a=2(p-a)(2R-r_a)$.

22. $a(b+c)=(r+r_a)(r_b+r_c)$.

se reproduit en A, mais en B done : $a(b-c)=(r_a-r)(r_b-r_c)$.

Sa transformation continue ne modifie pas les formules suivantes :

23. $bc=rr_a+r_br_c$.

24. $a^2=(r_a-r)(r_b+r_c)$.

25. $r_br_c-rr_a=bc\cos A$.

26. $a^2-4bc\cos B\cos C=\left(\frac{b^2-c^2}{a}\right)^2$.

27. $\sum\frac{b^2+c^2}{bc}\cos A=3$.

28. $b^3\cos C+c^3\cos B-a^3=4RS(\cos A-2\cos B\cos C)$.

29. $3a^2b^2c^2 + \sum a^6 - \sum a^4(b^2 + c^2) = 16\ S^2D^2$
$= 16S^2(9R^2 - a^2 + b^2 + c^2) = 16\,R^2S^2(1 - 8\cos A \cos B \cos C)$.
D étant la distance OH.

Enfin, remarquons, quoique n'ayant pas de raport avec la transformation continue, l'identité : $(b^2 + c^2 - a^2)(y^2 + z^2 - x^2) - (by + cz - ax)^2 = (bz - cy)^2 - (cx - az)^2 - (ay - bx)^2$ analogue à l'identité conue : $\sum a^2 \times \sum x^2 - \left(\sum ax\right)^2 = \sum (bz - cy)^2$.

E. — Quelques propriétés de Maximum et de Minimum.

a). — Soit un triangle ABC ; M un point de son plan ; A', B', C' les points où AM, BM, CM coupent BC, CA, AB.

$\sum\left(b\,.\,\overline{A'B}^2 + c\,.\,\overline{A'C}^2\right)$ sera minimum et égal à $\dfrac{8RS[p^2 - r(R + r)]}{p^2 + r(2R + r)}$, si M est le centre du cercle inscrit.

$\sum\left(b.\overline{A'C}^2 + c.\overline{A'B}^2\right)$ sera minimum si M est le réciproque $\dfrac{1}{a^2}, \dfrac{1}{b^2}, \dfrac{1}{c^2}$ du centre du cercle inscrit.

Cela se démontre par des calculs assez courts en faisant voir que, sur BC pour le premier, le point A' pour lequel $b.\overline{A'B}^2 + c.\overline{A'C}^2$ est minimum est le pied de la bissectrice de A, et pour le second que $b.\overline{A'C}^2 + c.\overline{A'B}^2$ est minimum, si A' est l'isotomique du pied de la bissectrice, c'est-à-dire le point simétrique de ce pied par raport au milieu de BC.

b). — Soit L un point de la base BC d'un triangle ABC ; soient λ_b, λ_c les projections de L sur AC et sur AB. Si le point L est tel que $\overline{L\lambda_b}^2 + \overline{L\lambda_c}^2 + \overline{\lambda_b\lambda_c}^2$ soit minimum, la perpendiculaire à BC menée en L passe par le point de Lemoine.

c). — L'antiparalèle à BC menée par M coupe CA en B_a, AB en C_a
» CA » AB en C_b, BC en A_b
» AB » BC en A_c, CA en B_c

$\overline{B_aC_a}^2 + \overline{C_bA_b}^2 + \overline{A_cB_b}^2$ est mimimum et égal à $\dfrac{16R^2S^2}{(p^2 - r\delta)^2 - 8S^2}$ pour le point : $a\,(3a^2 - b^2 - c^2)$, etc., apartenant à la droite qui joint le point de Lemoine au centre du cercle circonscrit.

d). 1. — Soit M un point du plan d'un triangle ABC, par M je mène des paralèles aux trois côtés dont j'apèle l, m, n les longueurs comprises entre les côtés.

Le point Δ pour lequel on a $\sum \overline{AM}^2 + \sum l^2$ minimum a pour coordonées $\frac{1}{a(-a^2+3b^2+3c^2)}$, etc.

Si l'on remarque que le point général de l'iperbole de Kiepert est $\frac{1}{a(-\lambda a^2+b^2+c^2)}$, etc., on voit que Δ apartient à l'iperbole de Kiepert, et on déduit cète construction du point Δ : ω étant l'angle de Brocard, on trace l'angle φ tel que $\cot\varphi = \frac{1}{2}\cot\omega$; on forme les triangles isocèles BCA′, CAB′, ABC′ (il sufit d'en tracer deus) qui ont φ pour angle à la base ($\cot\varphi = A'CB$) etc., AA′, BB′, CC′ se coupent en Δ.

2. — Le lieu du point tel que $\sum \overline{MA}^2 = \sum l^2$, est l'iperbole équilatère $\sum \frac{b^2+c^2-a^2}{xa} = 0$ qui passe au point de Steiner, a même direction d'axes que la conique de Steiner. Èle a pour centre le point :

$$\frac{1}{a}(a^2 - bc\cos A)(a^2 - 3bc\cos A), \text{ etc.}$$

e). 1. — Soit P un point du plan d'un triangle ABC qui se projète en A′,B′,C′ sur BC, CA, AB, je désigne par $[x]$, $[y]$, $[z]$ les projections de PA′, PB′, PC′ sur une direction Δ.

On a $[x]+[y]+[z]=0$ pour la direction dont le point à l'infini est $bz - cy,\ cx - az,\ ay - bx$.

On a : $[-x]+[y]+[z] = 0$ pour la direction :

$$bz - cy,\ -(cx+az),\ ay+bx.$$

Si P est le point de Lemoine, $[x]+[y]+[z]$ est nul sur une direction quelconque Δ.

Si P est l'un des associés du point de Lemoine, celui dont les coordonées sont : $-a, b, c$ par exemple, on a : $[-x]+[y]+[z]=0$ pour une direction quelconque.

$[x]+[y]+[z]$ est maximum pour la direction $-x + y\cos C + z\cos B$, etc., perpendiculaire à $bz - cy$, etc.

2. — Si j'apèle l, m, n les projections sur BC, CA, AB d'une longueur ρ donée en grandeur et en direction, $l+m+n$ est nul, si ρ a la direction Oo ; maximum et égal à $\frac{\rho . oO}{R}$ pour la direction de l'axe antiortique $x+y+z=0$, perpendiculaire à Oo.

$-l+m+n$ est nul si ρ a la direction Oo_a, maximum et égal à $\frac{\rho . o_a O}{R}$ pour la direction de l'interbissectrice correspondante à A

$$-x+y+z=0, \text{ perpendiculaire à } Oo_a.$$

$-l^2+m^2+n^2$ est maximum et minimum pour ρ dirigée ainsi : M est le point du cercle circonscrit $\frac{a}{b^2-c^2}$, etc., on joint M à un somet quelconque A; ce sont les bissectrices de l'angle que fait AM avec BC qui donent les directions du maximum et du minimum.

3. — Si l'on porte sur chaque côté une longueur proportionèle au carré de ce côté, la direction pour laquèle la somme des projections de ces longueurs sur cette direction est maximum ou nule est, pour le premier cas, la direction de la droite dont, le point à l'infini est $\frac{b-c}{a}$, etc. ; c'est la direction de $\sum a^2x=0$; pour le second cas c'est la direction perpendiculaire, soit la direction $a^2-b^2\cos C-c^2\cos B$, etc.

f). 1. — Lorsque l'on veut spécifier analitiquement ou construire deus directions remarquables perpendiculaires l'une à l'autre, come, par exemple, lorsque que l'on recherche la direction des axes de la plupart des coniques remarquables, inscrites ou circonscrites à un triangle, on trouve analitiquement des expressions compliquées de radicaus et, géométriquement, des constructions souvent complexes ; cète circonstance s'explique parfaitement par la nature des choses, mais il n'est pas impossible de trouver une interprétation élégante des résultats. Èle est, le plus souvent, donée analitiquement et géométriquement par le téorème suivant :

Soit M un point du cercle circonscrit à un triangle ABC, je joins M à un somet quelconque du triangle, A par exemple; les bissectrices des angles que la direction AM fait avec la direction BC ont une direction constante, quel que soit le somet choisi.

Il suit de là qu'au point M corespondent deus directions perpendiculaires l'une à l'autre, bien déterminées, et réciproquement, de sorte qu'à chaque direction de deus droites remarquables associées par la perpendicularité, corespond un point remarquable M qui détermine leur direction. Nous alons énoncer quelques téorèmes qui feront ressortir l'avantage de ces considérations, et nous emploierons, dans le sens que nous venons de définir, l'expression de : point M corespondant à tèles directions et réciproquement.

Pour toute conique circonscrite à ABC, les directions des axes ont évi-

demment pour point M, le quatrième point d'intersection de la conique et du cercle circonscrit.

2. — En apelant $[m]$ ou $[MN]$ la projection de m ou de MN sur une direction Δ, on demande de déterminer la direction Δ tèle que $[BC]^2 + [CA]^2 + [AB]^2$ soit maximum ou minimum. Voici le résumé du calcul. Soit α l'angle que la direction cherchée fait avec BC, il faut rendre

$$a^2 \cos^2\alpha + b^2 \cos^2(\alpha - C) + c^2 \cos^2(\alpha + B)$$

maximum ou minimum, on en déduit :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{b^2 \sin 2C - c^2 \sin 2B}{a^2 - b^2 \cos 2C + c^2 \cos 2B} = \frac{b^2c^2(b^2 - c^2)}{4S(m^2R^2 - b^2c^2)}.$$

On voit que si je mène par A une paralèle à la direction que détermine cète valeur de 2α, paralèle coupant BC en A′, et le cercle circonscrit en M, les bissectrices des angles que BC fait avec AM auront les directions cherchées.

De la valeur de $\operatorname{tg} 2\alpha$, je déduis que le coéficient angulaire de cète direction est $\dfrac{b(b^2 - c^2)}{a(a^2 - b^2)}$.

Le point à l'infini est donc : $\dfrac{b^2 - c^2}{a}$, $\dfrac{a^2 - b^2}{b}$, $\dfrac{c^2 - a^2}{c}$; la droite paralèle menée par A est donc : $\dfrac{y}{z} = \dfrac{c(a^2 - b^2)}{b(c^2 - a^2)}$, d'où enfin le point M sur le cercle circonscrit est $\dfrac{1}{a(b^2 - c^2)}$, $\dfrac{1}{b(c^2 - a^2)}$, $\dfrac{1}{c(a^2 - b^2)}$, point de Steiner.

Ces directions sont cèles des axes des coniques inscrites ou circonscrites de Steiner. C'est aussi là un moyen de les construire.

3. — Si l'on cherche la direction des axes des élipses de Cesàro $x^2 + y^2 + z^2 =$ constante (x, y, z désignant ici les coordonées normales absolues), on trouve le point $\dfrac{a}{b^2 - c^2}$, etc., pour le point M, qui détermine leur direction de la façon que nous avons indiquée, et cela done un moyen simple de tracer ces directions.

4. — P est un point du plan d'un triangle que je projète en A′, B′, C′ sur les côtés. Déterminer la direction Δ pour laquèle $[PA']^2 + [PB']^2 + [PC']^2$ est maximum ou minimum. On trouve que (PA′, PB′ PC′ étant come à l'ordinaire désignés par x, y, z) les directions Δ corespondent au point M du cercle circonscrit qui a pour coordonées $\dfrac{a}{x^2(b^2 - c^2) + a^2(y^2 - z^2)}$, etc.

Si P est par exemple K, o, G, on voit que le point M est respectivement

le point de Steiner, le point $\frac{a}{b^2 - c^2}$, etc., le point $\frac{a}{(b^2 - c^2)(a^4 - b^2c^2)}$, etc., enfin on a ce curieus téorème d'invariance :

Si P *est le point* : $+\sqrt{\text{a} \cos \text{A}}, +\sqrt{\text{b} \cos \text{B}}, +\sqrt{\text{c} \cos \text{C}}$ *ou l'un de ses associés*, $[\sqrt{\text{a} \cos \text{A}}]^2 + (\sqrt{\text{b} \cos \text{B}}]^2 + [\sqrt{\text{c} \cos \text{C}}]^2$ *est constant quèle que soit la direction* Δ.

Pour le point $+\sqrt{a \cos \text{A}}, +\sqrt{b \cos \text{B}}, +\sqrt{c \cos \text{C}}$, cète constante est : $\frac{4\text{S}^3}{\text{R}[\Sigma a\sqrt{a \cos \text{A}}]^2}$; pour le point $-\sqrt{a \cos \text{A}}, +\sqrt{b \cos \text{B}}, +\sqrt{c \cos \text{C}}$ èle est égale à $\frac{4\text{S}^3}{\text{R}[-a\sqrt{a \cos \text{A}} + b\sqrt{b \cos \text{B}} + c\sqrt{c \cos \text{C}}]^2}$.

A cète invariance ne corespondent de points réels que si le triangle ABC est acutangle.

Conaissant le point M (l, m, n) *du cercle circonscrit*, *trouver le lieu des points* P.

Le lieu de P est, d'après l'énoncé même de la question

$$\frac{m}{\left(\frac{b}{y^2(c^2 - a^2) + b^2(z^2 - x^2)}\right)} = \frac{n}{\left(\frac{c}{z^2(a^2 - b^2) + c^2(x^2 - y^2)}\right)}, \text{ ou}$$

(1) $bcx^2(mb + nc) - cy^2(nbc + mc^2 - ma^2) - bz^2(mbc + nb^2 - an^2) = 0$, qu'on aurait sous deus autres formes, si l'on avait employé les coordonées n et l ou l et m du point M.

(1) est une conique qui passe toujours aux points

$$\frac{x^2}{a \cos \text{A}} = \frac{y^2}{b \cos \text{B}} = \frac{z^2}{c \cos \text{C}}.$$

Si l'on particularise le point M, la conique (1) reprend une *forme* simétrique ; par exemple, si M est le point de Steiner, c'est-à-dire si $\frac{m}{n} = \frac{c(a^2 - b^2)}{b(c^2 - a^2)}$. Le lieu (1) de P devient $\Sigma x^2 \frac{b^2 - c^2}{a^2} = 0$.

Cète propriété d'invariance, come, d'ailleurs, les autres propriétés de ce paragrafe relatives aus projections, se conservent quand au lieu de trois droites on en prend un plus grand nombre. Ainsi, si l'on a n droites dans le plan, il existe toujours quatre points P tels que A′, B′, C′, D′, étant les pieds des perpendiculaires abaissées de P sur ces droites, on a $[\text{PA}']^2 + [\text{PB}']^2 + [\text{PC}']^2 + [\text{PD}']^2 + \ldots =$ constante, quèle que soit la direction Δ.

5. — l. [BC] + m. [CA] + n. [AB] est maximum et minimum si M est

le point du cercle circonscrit $\frac{1}{b-c}$, $\frac{1}{c-a}$. $\frac{1}{a-b}$, auquel corespondent aussi les directions des axes de $yz + zx + xy = 0$.

— $l.[BC] + m.[CA] + n.[AB]$ est maximum si M est le point du cercle circonscrit : $\frac{1}{b-a}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ auquel corespondent aussi les axes de $-yz + zx + xy = 0$.

6. — Voici un problème pour lequel la considération du point M correspondant à deus directions rectangulaires, permet d'ariver à une interprétation *imagée* du résultat qui se présente sans èle, sous une forme bien peu élégante et nous ne voyons guère de moyen naturel d'y ariver autrement.

Soient dans un triangle ABC *un point* M_1 *et une force* M_1F *de direction donée, apliquée en* M_1 ; *on la décompose en trois forces* f_a, f_b, f_c *dirigées suivant* M_1A, M_1B, M_1C *sous la condition que* $f_a^2 + f_b^2 + f_c^2$ *soit minimum. Quèles directions faut-il doner à* M_1F *pour que cète some* $f_a^2 + f_b^2 + f_c^2$ *soit le maximum minimorum et le minimum minimorum?*

Il faut faire un triangle $A'B'C'$ dont les trois côtés a', b', c' sont paralèles à M_1A, M_1B, M_1C; chercher le point μ du cercle circonscrit à $A'B'C'$ qui a pour coordonées normales $\frac{a'}{b'^2 - c'^2}$, etc., par raport au triangle de référence $A'B'C'$; ce point μ est le point M corespondant aus directions cherchées. On peut remarquer que ce sont les directions des axes des élipses de Cesàro du triangle $A'B'C'$ (lieus des points tels que la some des carés de leurs distances aus côtés soit constante).

7. — Les directions des axes de la conique

$$lx^2 + my^2 + nz^2 + nz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$$

sont donées par le point M du cercle circonscrit qui a pour coordonées

$$\frac{a}{l(b^2 - c^2) + ma^2 - na^2 + 2gca - 2hab}, \text{ etc.}$$

Cète expression étant toujours entendue dans le sens où èle est expliquée **f. 1**.

Nous avons doné plusieurs des résultats compris dans les paragrafes **e** et **f**, come questions proposées, dans *Mathesis*, questions 1222 (1899); 1257 (1900), etc.

IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 4612-3-01. — (Encre Lorilleux)